8. Tests d’hypothèses unilatéraux

Sam Gyetvay

ECO 2273 – Économetrie I

20 novembre 2025

Aujourd’hui

Révision : tests d’hypothèses bilatéraux au niveau de 5%

Tests d’hypothèses unilatéraux

Le nouveau voisin de ma grand-mère

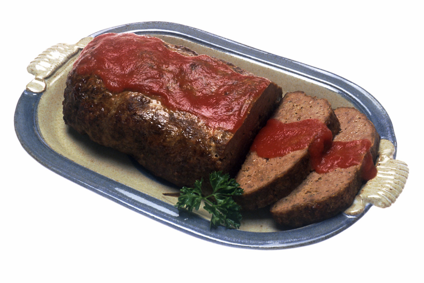
Ma grand-mère passe toute la journée assise à sa fenêtre à espionner ses voisins. Un jour, un nouveau voisin emménage à côté

Quand ma grand-mère a vu son nouveau voisin, il portait un jean déchiré, un vieux t-shirt, des baskets cassées, et avait des cheveux négligés. Ma grand-mère s'est dit à elle-même : « Ce jeune homme doit être très pauvre. Je devrais l'aider et lui faire un pain de viande. »

Le lendemain, elle a apporté un pain de viande frais à son appartement. Quand il a ouvert la porte, elle a jeté un coup d'œil à l'intérieur. Il y avait un matelas sur le sol, une seule chaise, et une lampe. Pas de télévision, pas d'ordinateur, pas d'autres meubles. L'homme a accepté le pain de viande et a dit : « Merci ! Je meurs de faim. »

« Comme je le pensais, » ma grand-mère s'est dit en s'éloignant. « Ce jeune homme est vraiment très pauvre. Je devrais lui faire un pain de viande chaque semaine. »


XENOS



Le nouveau voisin de ma grand-mère

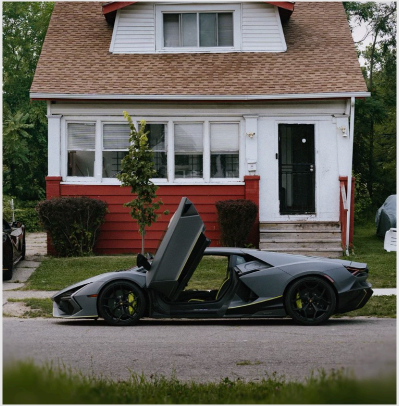
Le lendemain, ma grand-mère a remarqué une nouvelle voiture garée devant l'appartement de son voisin.

La voiture était une magnifique Lamborghini toute neuve.

Puis, ma grand-mère a vu quelque chose qui l'a beaucoup surprise

Le même jeune voisin s'est approché de la Lamborghini, l'a déverrouillée, est monté dedans, et est parti.

« Je me suis trompée. Il n'est pas pauvre ! » ma grand-mère s'est dit à elle-même. « Il est riche ! »



Test d’hypothèses unilatérales

Cette histoire absurde illustre la logique des **tests d’hypothèses unilatéraux**

L’hypothèse de ma grand-mère était que son voisin était pauvre

Son style vestimentaire « négligé » soutenait son hypothèse

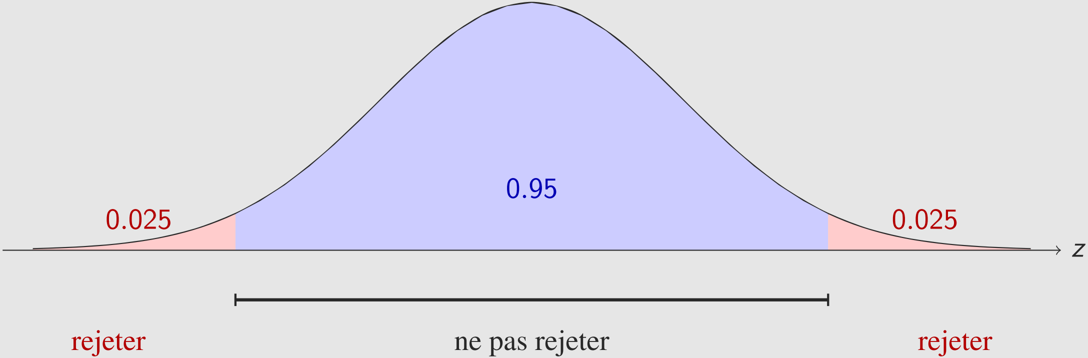
De même pour son appartement peu meublé, et le fait qu’il semblait très affamé

Ces preuves ne *prouvent* pas qu’il est pauvre, mais elles n’ont pas conduit à rejeter son hypothèse

Cependant, lorsqu’elle a vu qu’il conduisait une Lamborghini, elle a réalisé son erreur et a rejeté son hypothèse

Les tests d’hypothèses unilatéraux sont *asymétriques*. Seules les preuves que le voisin est riche peuvent rejeter l’hypothèse que le voisin est pauvre

Test d'hypothèse bilatéral



Tests d'hypothèses bilatéraux : la méthode

Pour réaliser un **test d'hypothèse bilatéral** au niveau de **significativité de 5%**

Étape 1 : Énoncer l'**hypothèse nulle**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

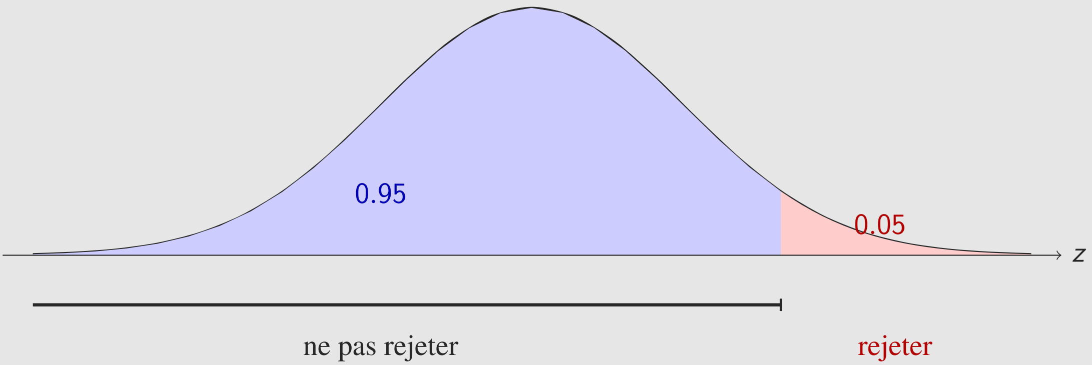
Étape 2 : former la **statistique de test**

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

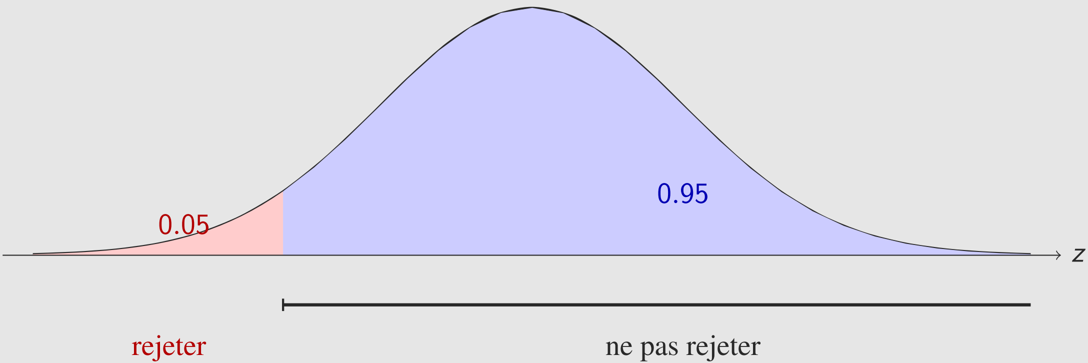
Étape 3 : comparer la statistique de test avec la **valeur critique** $z_{0.975} \approx 2$

- Si $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{0.975}$, **rejeter** l'hypothèse nulle au niveau de significativité de 5%
- Si $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{0.975}$, **ne pas rejeter** l'hypothèse nulle au niveau de significativité de 5%

Test d'hypothèse unilatéral $H_0 : \mu \le \mu_0$



Test d'hypothèse unilatéral $H_0 : \mu \geq \mu_0$



Hypothèses nulles unilatérales

Lors du dernier cours, nous nous sommes concentrés sur les hypothèses nulles bilatérales. "Bilatéral" signifie qu'il y a deux façons de la rejeter

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

- H_0 est fausse si $\mu > \mu_0$
- H_0 est fausse si $\mu < \mu_0$

Aujourd'hui, nous considérerons également les tests d'hypothèses nulles **unilatérales**

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

- H_0 est fausse si $\mu > \mu_0$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

- H_0 est fausse si $\mu < \mu_0$

Exemples d'hypothèses unilatérales

Le revenu moyen des travailleurs à Montréal est **au plus** 50 000$

$$H_0 : \mu \leq 50000$$

Le taux d'inflation est **d'au moins** 2%

$$H_0 : \mu \geq 0.02$$

Le taux de chômage est **au plus** 5%

$$H_0 : \mu \leq 0.05$$

La moyenne de la classe pour ECO2273 est **d'au moins** 70%

$$H_0 : \mu \geq 0.7$$

Hypothèse alternative

Pour une hypothèse nulle bilatérale, nous remplaçons = par ≠ pour obtenir l'hypothèse alternative

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu = \mu_0 \\
H_a &: \mu \neq \mu_0
\end{aligned}
$$

Pour une hypothèse unilatérale, nous "inversions" le sens du symbole d'inégalité

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu \geq \mu_0 \\
H_a &: \mu < \mu_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu \geq \mu_0 \\
H_a &: \mu < \mu_0
\end{aligned}
$$

Dans ce cours, une hypothèse unilatérale sera toujours ≥ ou ≤ donc les alternatives seront toujours < ou >, respectivement

Exemples d'hypothèses unilatérales

Le revenu moyen des travailleurs à Montréal est **au plus** 50 000$

$$H_0 : \mu \leq 50000$$
$$H_a : \mu > 50000$$

Le taux d'inflation est **d'au moins** 2%

$$H_0 : \mu \geq 0.02$$
$$H_a : \mu < 0.02$$

Le taux de chômage est **au plus** 5%

$$H_0 : \mu \leq 0.05$$
$$H_a : \mu > 0.05$$

La moyenne de la classe pour ECO2273 est **d'au moins** 70%

$$H_0 : \mu \geq 0.7$$
$$H_a : \mu < \mu_0$$

Statistique de test pour un test unilatéral

La statistique de test pour un test unilatéral est la même que celle pour un test bilatéral

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Comme avec un test bilatéral, lorsque $\mu = \mu_0$, $z \sim N(0, 1)$

Pour un test unilatéral, l'hypothèse nulle contient plus d'une valeur possible de μ

Néanmoins, nous devons toujours considérer uniquement μ_0 lors du calcul de la statistique de test. Nous verrons bientôt pourquoi

Rappel : valeurs critiques pour un test bilatéral

Pour un test bilatéral au niveau de signification de 5%, nous utilisons à la fois $z_{0.975}$ et $-z_{0.975}$ comme valeurs critiques

Dans un test bilatéral, nous rejetons si $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{0.975}$

En d'autres termes, rejeter si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{0.975}$ ou si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{0.975}$

Un test bilatéral nécessite deux valeurs critiques.

Valeurs critiques pour un test unilatéral

Pour un test unilatéral au niveau de signification de 5%, nous utilisons soit $z_{0.95}$ soit $-z_{0.95}$

Si nous testons $H_0 : \mu \geq \mu_0$, nous utilisons $-z_{0.95}$

- Rejeter si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{0.95}$

Si nous testons $H_0 : \mu \leq \mu_0$, nous utilisons $z_{0.95}$

- Rejeter si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{0.95}$

Un test unilatéral nécessite seulement une valeur critique

Un test bilatéral nécessite deux valeurs critiques

Pourquoi ?

- $H_0 : \mu = \mu_0$ est fausse si $\mu > \mu_0$ **ou** si $\mu < \mu_0$
- Il y a donc **deux** manières de rejeter H_0
  1. Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ est un nombre positif suffisamment grand $\longrightarrow \mu > \mu_0 \longrightarrow \mu \neq \mu_0$
  2. Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ est un nombre négatif suffisamment grand $\longrightarrow \mu < \mu_0 \longrightarrow \mu \neq \mu_0$

Un test unilatéral nécessite une valeur critique

Pourquoi ?

- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ est fausse si $\mu < \mu_0$
- Il y a seulement **une** manière de rejeter H_0
  1. Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ est un nombre négatif suffisamment grand $\rightarrow \mu < \mu_0$

Un test unilatéral nécessite une valeur critique

Pourquoi ?

- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ est fausse si $\mu < \mu_0$
- Il y a seulement **une** manière de rejeter H_0
  1. Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ est un nombre négatif suffisamment grand $\longrightarrow \mu < \mu_0$
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ est fausse si $\mu > \mu_0$
- Il y a seulement **une** manière de rejeter H_0
  1. Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ est un nombre positif suffisamment grand $\longrightarrow \mu > \mu_0$

Tests d'hypothèse unilatéraux $H_0 : \mu \geq \mu_0$: la méthode

Pour réaliser un **test d'hypothèse unilatéral** au niveau de signification de 5%

Étape 1 : Énoncer l'**hypothèse nulle**

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

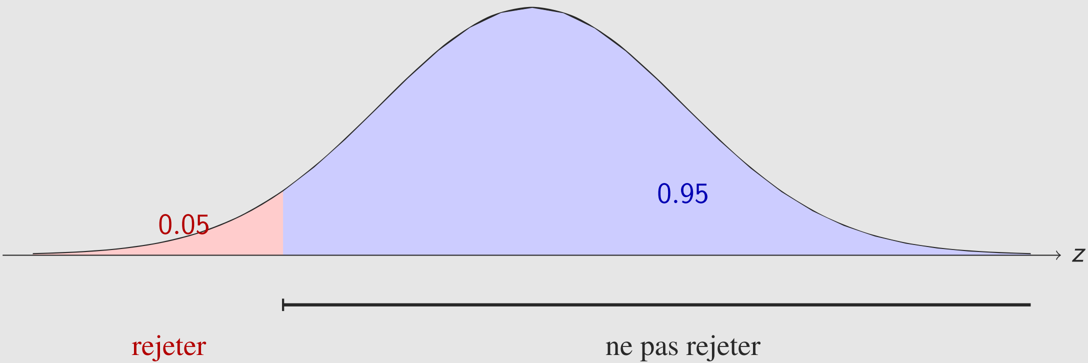
Étape 2 : former la **statistique de test**

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Étape 3 : comparer la statistique de test avec la **valeur critique** $z_{0.95} \approx 2$

- Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{0.95}$, **rejeter** l'hypothèse nulle au niveau de signification de 5%
- Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_{0.975}$, **ne pas rejeter** l'hypothèse nulle au niveau de signification de 5%

Test d'hypothèse unilatéral $H_0 : \mu \geq \mu_0$



Tests d'hypothèse unilatéraux $H_0 : \mu \leq \mu_0$: la méthode

Pour réaliser un **test d'hypothèse unilatéral** au niveau de signification de 5%

Étape 1 : Énoncer l'**hypothèse nulle**

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

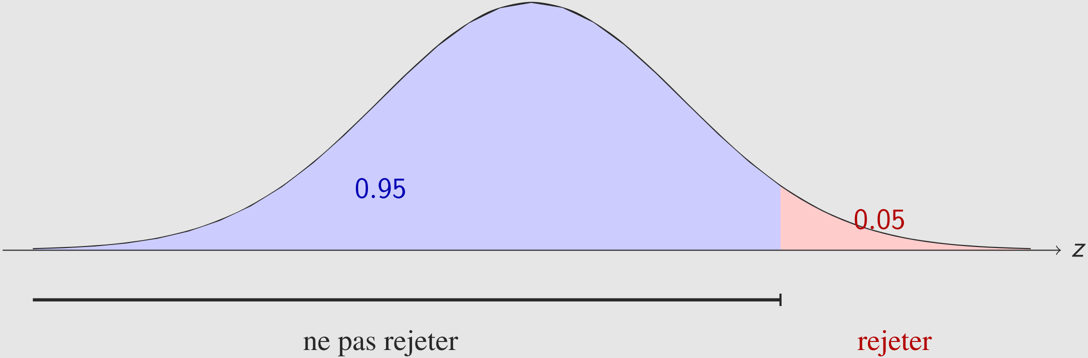
Étape 2 : former la **statistique de test**

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Étape 3 : comparer la statistique de test avec la **valeur critique** $z_{0.95} \approx 2$

- Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{0.95}$, **rejeter** l'hypothèse nulle au niveau de signification de 5%
- Si $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{0.975}$, **ne pas rejeter** l'hypothèse nulle au niveau de signification de 5%

Test d'hypothèse unilatéral $H_0 : \mu \leq \mu_0$



Problème pratique n° 1

Pour chaque phrase, énoncez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative

1. Le travailleur canadien moyen travaille 30,5 heures par semaine
2. Le prix moyen d'une voiture neuve est au plus 40 000 $
3. Le taux de chômage en octobre 2025 est d'au moins 6,8%

Problème pratique n° 2

Calculez les probabilités ci-dessous, où $z \sim N(0,1)$

1. $P(z > z_{0.95})$
2. $P(z \leq z_{0.95})$
3. $P(-z_{0.95} \leq z \leq z_{0.95})$
4. $1 - P(z > z_{0.95})$

Dessinez une PDF normale standard et coloriez la zone pertinente pour chaque probabilité

Problème pratique n°3

Léon, un économiste du travail, croit que le nombre moyen d'heures travaillées par semaine est **inférieur à 40**. Un échantillon aléatoire de 100 travailleurs montre une moyenne de $\bar{x} = 38,5$ heures avec un écart-type de $\sigma = 4$ heures.

1. Énoncez les hypothèses nulle et alternative.
2. Calculez la statistique de test.
3. En utilisant un niveau de signification de 5%, rejette-t-on H_0 ?

Problème pratique n°4

Mikhail, un économiste du travail, soupçonne que le salaire de départ moyen pour les nouveaux diplômés est **supérieur à 50 000 $**. Un échantillon aléatoire de 250 diplômés montre une moyenne de $\bar{x} = 52{,}000$ avec un écart-type de la population de $\sigma = 5{,}000$.

1. Énoncer les hypothèses nulle et alternative.
2. Calculer la statistique de test.
3. En utilisant un niveau de signification de 5%, rejette-t-on H_0 ?