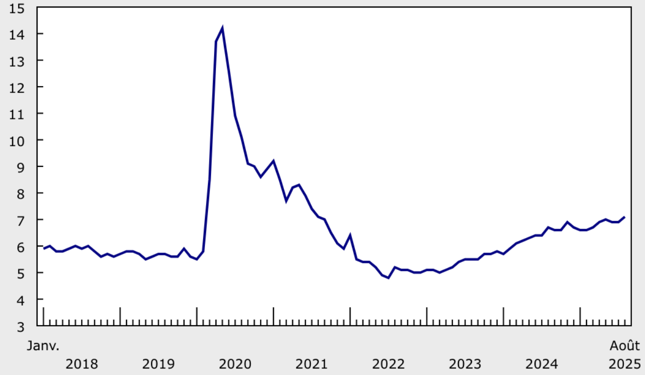
6. Intervalles de confiance

Sam Gyetvay

ECO 2273 – Économetrie I

7 novembre 2025

Taux de chômage au Canada, 2018-2025



Source(s) : Enquête sur la population active (3701), tableau 14-10-0287-01.

https://www150.statcan.gc.ca/n1/quotidien-journalier/250905/cg-a002-fra.htm

Politique monétaire et fiscale en temps réel

Mark Carney et Tiff Macklem contrôlent la politique fiscale et monétaire

Si le chômage est trop bas, l'économie peut "surchauffer" entraînant une hausse de l'inflation

- Monétaire : augmenter les taux d'intérêt
- Fiscal : réduire les dépenses, augmenter les impôts

Si le chômage est trop élevé, l'économie peut tomber en récession

- Monétaire : réduire les taux d'intérêt
- Fiscal : déficits budgétaires, baisser les impôts

Mark Carney et Tiff Macklem sont satisfaits lorsque le chômage et l'inflation sont bas et stables

Mark Carney et Tiff Macklem (version faible taux de chômage)

Mark Carney et Tiff Macklem (version fort taux de chômage)

Calcul du taux de chômage

Mark et Tiff ont besoin d'estimations à jour pour pouvoir réagir rapidement lorsque les conditions changent

Nous ne réalisons pas un recensement complet des Canadiens chaque mois pour calculer le taux de chômage. Au lieu de cela, nous prenons un échantillon de 65 000 ménages (connu sous le nom d'enquête sur la population active) et calculons le taux de chômage parmi eux

Cela nous permet de faire des déclarations comme

> *il y a 95% de chances que le taux de chômage soit entre 6,9% et 7,3%*

Cela s'appelle un **intervalle de confiance**. Aujourd'hui, nous apprenons à les construire

Aujourd'hui

Il existe de nombreux types différents d'intervalles de confiance

- Certains utilisent la distribution normale, d'autres la distribution de Student-t
- Certains sont pour petits échantillons, d'autres pour grands échantillons
- Certains supposent la normalité, d'autres utilisent le théorème de la limite centrale
- Certains supposent σ^2 connu, d'autres l'estiment
- Certains couvrent 90%, 95% ou 99% de probabilité

Ce sont des détails qui existent principalement pour confondre les étudiants en économétrie. Les vrais économistes pensent rarement à ces choses. Nous ne nous en préoccuperons pas aujourd'hui

Aujourd'hui, nous considérerons uniquement les intervalles de confiance à 95%, nous supposerons de grands échantillons, nous traiterons σ^2 comme connu, et nous utiliserons $z_{0.975} \approx 2$

Si vous avez une question sur les intervalles de confiance lors de l'examen de mi-session, utilisez les formules de ce diaporama, qui sont basées sur ces hypothèses

Rappel : Théorème central limite

Lorsque n est grand :

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

En mots :

> *“La moyenne échantillonnale $\bar{X}_n$ suit une distribution normale avec une moyenne μ et une variance σ^2/n”*

Nous utiliserons le Théorème central limite pour construire des intervalles de confiance

Rappel : Normale standard

Normale standard est le nom spécial pour une normale avec une moyenne nulle ($\mu = 0$) et un écart-type égal à un ($\sigma = 1$)

La normale standard $Z \sim N(0, 1)$ a également un nom spécial/lettre grecque pour sa fonction de densité de probabilité $\phi(z)$ et sa fonction de répartition cumulative $\Phi(z)$

La normale standard est importante car nous pouvons toujours convertir une normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ en une normale standard en normalisant : soustraire la moyenne et diviser par l'écart-type

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Nous utiliserons ce fait en combinaison avec le Théorème central limite pour construire des intervalles de confiance

Quantiles de la normale standard

Le **quantile** z_p de la normale standard est la valeur telle que

$$\Phi(z_p) = p$$

En mots : la probabilité qu'une variable normale standard soit inférieure à z_p est égale à p.
Si $Z \sim N(0, 1)$, alors

$$P(Z \leq z_p) = p$$

Cette définition peut être délicate la première fois que vous la voyez, alors pratiquons

Quantiles de la normale standard

Le **quantile** z_p de la normale standard est la valeur telle que

$$\Phi(z_p) = p$$

En mots : la probabilité qu'une variable normale standard soit inférieure à z_p est égale à p.
Si $Z \sim N(0, 1)$, alors

$$P(Z \leq z_p) = p$$

Cette définition peut être délicate la première fois que vous la voyez, alors pratiquons

- $z_{0.5} = 0 \longrightarrow P(Z \leq 0) =$

Quantiles de la normale standard

Le **quantile** z_p de la normale standard est la valeur telle que

$$\Phi(z_p) = p$$

En mots : la probabilité qu'une variable normale standard soit inférieure à z_p est égale à p.
Si $Z \sim N(0, 1)$, alors

$$P(Z \leq z_p) = p$$

Cette définition peut être délicate la première fois que vous la voyez, alors pratiquons

- $z_{0.5} = 0 \longrightarrow P(Z \leq 0) = 0.5$
- $z_{0.95} = 1.645 \longrightarrow P(Z \leq 1.645) =$

Quantiles de la normale standard

Le **quantile** z_p de la normale standard est la valeur telle que

$$\Phi(z_p) = p$$

En mots : la probabilité qu'une variable normale standard soit inférieure à z_p est égale à p.
Si $Z \sim N(0, 1)$, alors

$$P(Z \leq z_p) = p$$

Cette définition peut être délicate la première fois que vous la voyez, alors pratiquons

- $z_{0.5} = 0 \longrightarrow P(Z \leq 0) = 0.5$
- $z_{0.95} = 1.645 \longrightarrow P(Z \leq 1.645) = 0.95$
- $z_{0.975} = 1.96 \longrightarrow P(Z \leq 1.96) =$

Quantiles de la normale standard

Le **quantile** z_p de la normale standard est la valeur telle que

$$\Phi(z_p) = p$$

En mots : la probabilité qu'une variable normale standard soit inférieure à z_p est égale à p.
Si $Z \sim N(0, 1)$, alors

$$P(Z \leq z_p) = p$$

Cette définition peut être délicate la première fois que vous la voyez, alors pratiquons

- $z_{0.5} = 0 \longrightarrow P(Z \leq 0) = 0.5$
- $z_{0.95} = 1.645 \longrightarrow P(Z \leq 1.645) = 0.95$
- $z_{0.975} = 1.96 \longrightarrow P(Z \leq 1.96) = 0.975$
- $z_{0.99} = 2.33 \longrightarrow P(Z \leq 2.33) =$

Quantiles de la normale standard

Le **quantile** z_p de la normale standard est la valeur telle que

$$\Phi(z_p) = p$$

En mots : la probabilité qu'une variable normale standard soit inférieure à z_p est égale à p.
Si $Z \sim N(0, 1)$, alors

$$P(Z \leq z_p) = p$$

Cette définition peut être délicate la première fois que vous la voyez, alors pratiquons

- $z_{0.5} = 0 \longrightarrow P(Z \leq 0) = 0.5$
- $z_{0.95} = 1.645 \longrightarrow P(Z \leq 1.645) = 0.95$
- $z_{0.975} = 1.96 \longrightarrow P(Z \leq 1.96) = 0.975$
- $z_{0.99} = 2.33 \longrightarrow P(Z \leq 2.33) = 0.99$

Illustration : $z_{0.5}$

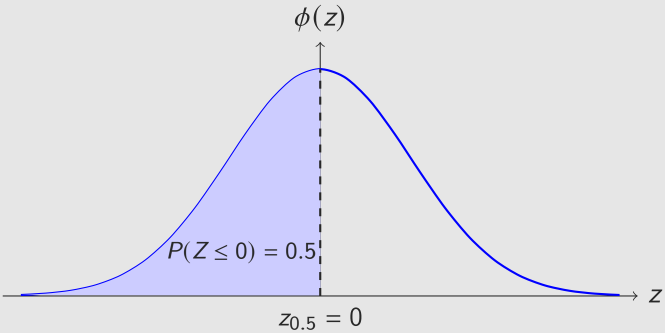


Illustration : $z_{0.95}$

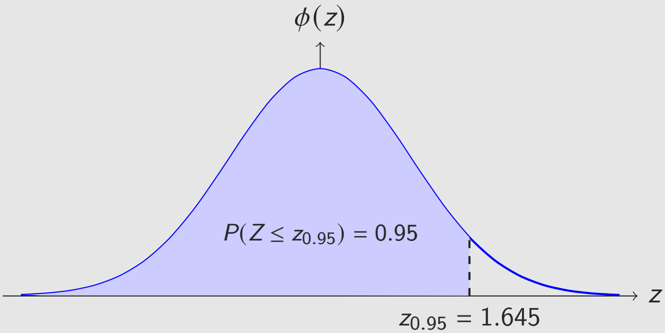


Illustration : $z_{0.975}$

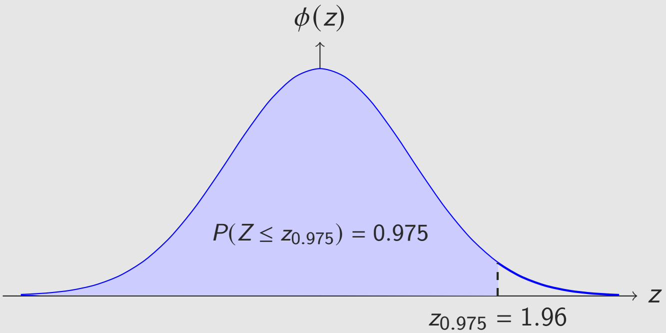
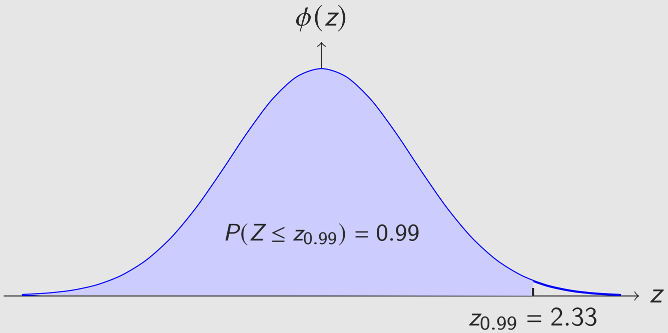


Illustration : $z_{0.99}$



Rappel : la distribution normale est symétrique

La distribution normale a une forme de “cloche”

Les cloches sont symétriques, tout comme la distribution normale

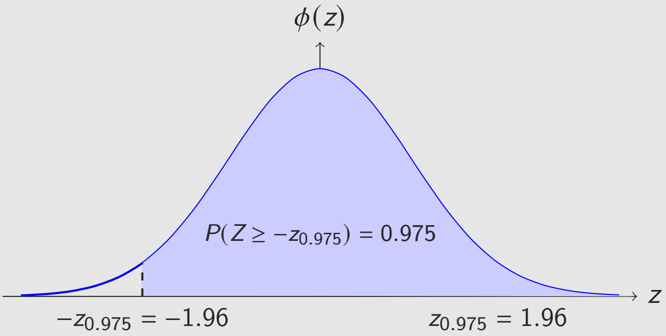
La distribution normale est symétrique autour de sa moyenne

Comme elle est symétrique, sa moyenne coïncide avec sa médiane $z_{0.5}$

Une conséquence de cette symétrie est que

$$P(Z \leq z_P) = P(Z \geq -z_p)$$

Illustration : symétrie à $z_{0.975}$



Un intervalle de 95% pour la normale standard

Nous pouvons combiner ces deux faits pour créer un intervalle centré sur zéro contenant 95% de la probabilité dans une normale standard

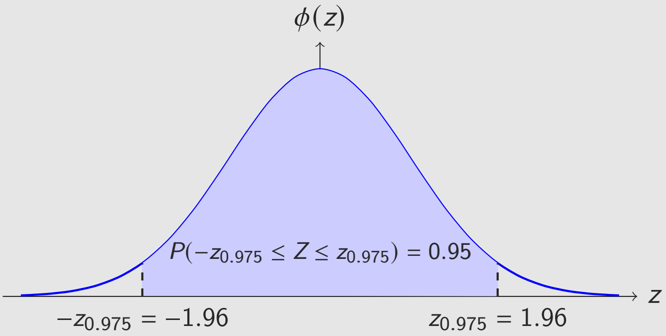
$$P(-z_{0.975} \leq Z \leq z_{0.975}) = 0.95$$

C'est le bloc de construction de base pour les intervalles de confiance que nous allons construire

Nous pouvons écrire cet intervalle comme $[-z_{0.975}, +z_{0.975}]$

$$P(Z \in [-z_{0.975}, +z_{0.975}]) = 0.95$$

Illustration : $[-z_{0.975}, +z_{0.975}]$



Convertir une normale en une normale standard

Si nous avons une variable aléatoire normale

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

alors nous pouvons la normaliser et la transformer en une normale standard en

1. Soustrayant la moyenne μ
2. Divisant par l'écart-type σ

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Intervalle de confiance à 95% pour $N(\mu, \sigma^2)$

Prenez maintenant une variable aléatoire normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, et nous pouvons appliquer le résultat de la diapositive précédente

$$P\left(-z_{0.975} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +z_{0.975}\right) = 0.95$$

$$P\left(-z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\bar{X}-z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}+z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Nous avons maintenant un intervalle à 95% pour μ : $[X - z_{0.975}\sigma, X + z_{0.975}\sigma]$

$$P(\mu \in [X - z_{0.975}\sigma, X + z_{0.975}\sigma]) = 0.95$$

Parfois, nous l'écrivons comme $X \pm z_{0.975}\sigma$

Intervalle de confiance à 95% pour une moyenne d'échantillon

D'après le Théorème Central Limite, nous avons que

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Maintenant, tout ce que nous avons à faire est d'appliquer le résultat de la diapositive précédente et nous obtenons notre intervalle de confiance à 95% !

Laissons $\bar{X}$ représenter la vraie moyenne de la population que nous voulons estimer. Par exemple, $\bar{X}$ est le taux de chômage si nous faisions un recensement complet

$$P\left(\bar{X} \in \left[\bar{X}_n - z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0.95$$

(Remplacez μ par $\bar{X}$, et remplacez σ par $\sigma/\sqrt{n}$. Note : $\sigma/\sqrt{n} = \sqrt{\sigma^2/n}$)

Erreur standard vs. écart-type

σ est appelé l'**écart-type**. C'est l'écart-type de la variable aléatoire X

$\sigma/\sqrt{n}$ est appelé l'**erreur standard**. C'est l'écart-type de la moyenne d'échantillon $\bar{X}_n$

C'est un point de terminologie très subtil et confus

Erreur standard pour les proportions

Lorsque nous calculons le taux de chômage, il s'agit d'une proportion

$$\text{Taux de Chômage} = \frac{\text{\# Chômeurs demandeurs d'emploi}}{\text{\# Employés + \# Chômeurs demandeurs d'emploi}}$$

Pour les proportions p, nous avons une formule spéciale pour l'erreur standard de la moyenne d'échantillon :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}}$$

Calcul de l'intervalle de confiance à 95% pour le chômage au Canada

Nous savons maintenant comment calculer les nombres dans cette déclaration

il y a 95% de chances que le taux de chômage soit entre 6,9% et 7,3%

C'est juste $\bar{p}_n \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}}$

Insérez $z_{0.975} \approx 2$, $\bar{p}_n = 7,1\%$, et $n = 65000$, pour obtenir

$$7,1\% \pm 2\sqrt{\frac{0,071 \times (1-0,071)}{65000}} = 7,1\% \pm 0,2\% = [6,9\%, 7,3\%]$$

Ce que vous devez savoir pour l'examen de mi-session

À l'examen de mi-session, il pourra vous être demandé de calculer un intervalle de confiance à 95% pour une moyenne d'échantillon ou une proportion d'échantillon

Je ne demanderai pas 90%, 99% ou tout autre. Toujours 95%

La seule chose dont vous devez vous souvenir est $z_{0.975} \approx 2$

et les formules

$$\bar{X}_n \pm 2\sigma/\sqrt{n} \quad \text{ou} \quad \bar{p}_n \pm 2\sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}}$$

Essayez la question sur l'examen de pratique pour vous entraîner

La semaine prochaine

J’ai publié un ensemble de questions d’entraînement sur le site web du cours

L’examen de mi-session aura lieu en classe de 9h30 à 11h30

Vous avez deux heures, et il y a sept questions

C’est largement suffisant. Détendez-vous, réfléchissez, ne vous précipitez pas. Gardez vos réponses concises et écrivez lisiblement

Vous pouvez apporter une calculatrice, mais vous n’en aurez pas besoin. Tous les calculs sont élémentaires

Pas de feuille de formules. Mémorisez les formules. La mémorisation représente 55% de l’apprentissage

Lisez toutes les questions d’abord, et décidez dans quel ordre y répondre. Commencez par les questions dont vous savez répondre, puis passez aux plus difficiles

Conseils de révision pour l'examen de mi-session

La meilleure chose que vous puissiez faire pour vous préparer à l'examen de mi-session est de tenter de répondre aux questions d'entraînement

Les questions de l'examen de mi-session sont similaires aux questions d'entraînement. Certaines sont presque identiques (seuls les chiffres changent), d'autres sont une légère "variation", quelques-unes sont différentes

Utilisez les questions d'entraînement pour guider votre étude du matériel de cours. Suivez cet algorithme

- Tentez un problème
- Si vous le résolvez facilement, passez au problème suivant
- Si vous vous trompez ou avez du mal à trouver la solution, retournez à la partie pertinente des notes de cours/diapositives et réétudiez-la
- Répétez

Si vous voulez plus de problèmes, montrez vos questions d'entraînement à ChatGPT et demandez-lui de générer des questions similaires

Dormez bien jeudi soir. Bonne chance !