2. Introduction à la théorie des probabilités

Jeux de hasard et distributions discrètes

Sam Gyetvay

ECO 2273 – Économetrie I

September 12, 2025

Introduction

La théorie des probabilités trouve ses origines dans l'étude des **jeux de hasard**

Des mathématiciens comme **Pierre de Fermat** et **Blaise Pascal** étaient fascinés par les dés et autres jeux et les ont étudiés de manière formelle

La théorie des probabilités est un outil central en économétrie, en théorie économique et dans toutes les sciences mathématiques en général. La probabilité est la théorie mathématique qui sous-tend toutes les statistiques

Aujourd'hui, nous explorerons les notions fondamentales de probabilité à l'aide d'exemples issus des mêmes jeux qui obsédaient Fermat et Pascal :

- Lancer une pièce (pile ou face),
- Lancer des dés,
- Tirer des cartes d'un jeu.

Les inventeurs de la théorie des probabilités

Pierre de Fermat (1607–1665)

Blaise Pascal (1623–1662)

Fermat à Pascal, 1654

Monsieur,

Si j'entreprends de marquer un point avec un seul dé en huit lancers, et si nous convenons après que l'argent est mis en jeu, que je ne ferai pas le premier lancer, il est nécessaire selon ma théorie que je prenne 1/6 de la somme totale pour être impartial à cause du premier lancer susmentionné.

Et si nous convenons ensuite que je ne ferai pas le deuxième lancer, je devrais, pour ma part, prendre le sixième du reste, soit 5/36 du total.

Pascal à Fermat, 29 juillet 1654

Monsieur,—

1. L'impatience m'a saisi autant que vous, et bien que je sois encore au lit, je ne peux m'empêcher de vous dire que j'ai reçu votre lettre concernant le problème des points hier soir des mains de M. Carcavi, et que je l'admire plus que je ne saurais vous le dire. Je n'ai pas le loisir d'écrire longuement, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux divisions des points et des dés avec une justice parfaite.

Probabilité

La probabilité est un nombre entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'un événement se produise.

Une probabilité de **0** signifie que l'événement **ne se produira jamais**.

- Obtenir un 7 en lançant un dé

Une probabilité de **1** signifie que l'événement **se produira avec certitude**.

- La pièce tombe sur pile ou face

Les probabilités proches de **0** décrivent des événements qui **arrivent rarement**.

- "Quinte flush royale" au poker (as, roi, dame, valet et 10 — tous de la même couleur)

Les probabilités proches de **1** décrivent des événements qui **arrivent très souvent**.

- Tirer une carte autre que le joker

Une probabilité de **0,5**: **autant de chances de se produire que de ne pas se produire**.

- Tirer un coeur ou un trèfle

Expérience et espace d'échantillonnage

Une **expérience** est une procédure répétable qui produit un résultat

L'**espace d'échantillonnage** S est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience

Exemples:

- Lancer une pièce: $S = \{\text{H}, \text{T}\}$
- Lancer un dé: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lancer deux pièces: $S = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}$
- Lancer deux dés: $S = \left\{ \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix} \right\}$

Quelle est la taille de l'espace d'échantillonnage ?

Si une expérience a n résultats possibles, et qu'on la répète k fois:

$$|S| = n^k$$

Exemples:

- Lancer une pièce 3 fois: $|S| = 2^3 = 8$.
- Lancer un dé 2 fois: $|S| = 6^2 = 36$.
- Lancer un dé deux fois et lancer trois pièces:

$$|S| = 6^2 \cdot 2^3 = 36 \cdot 8 = 288$$

Combien de façons y a-t-il de tirer 7 cartes d'un jeu de 52 ?

Compter les combinaisons

Commençons par des cas simples:

$N \backslash k$	1	2	3	4
2	2	1	-	-
3	3	3	1	-
4	4	6	4	1

Ici, chaque entrée montre le nombre de sous-ensembles de taille k à partir d'un ensemble de taille N.

Remarquez des motifs ?

Compter les combinaisons

Commençons par des cas simples:

$N\backslash k$	1	2	3	4
2	2	1	-	-
3	3	3	1	-
4	4	6	4	1

Ici, chaque entrée montre le nombre de sous-ensembles de taille k à partir d'un ensemble de taille N.

Remarquez des motifs ?

- La première colonne $k = 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)

Compter les combinaisons

Commençons par des cas simples:

$N \backslash k$	1	2	3	4
2	2	1	-	-
3	3	3	1	-
4	4	6	4	1

Ici, chaque entrée montre le nombre de sous-ensembles de taille k à partir d'un ensemble de taille N.

Remarquez des motifs ?

- La première colonne $k = 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)
- La diagonale $k = N - 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)

Compter les combinaisons

Commençons par des cas simples:

$N \backslash k$	1	2	3	4
2	2	1	-	-
3	3	3	1	-
4	4	6	4	1

Ici, chaque entrée montre le nombre de sous-ensembles de taille k à partir d'un ensemble de taille N.

Remarquez des motifs ?

- La première colonne $k = 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)
- La diagonale $k = N - 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)
- La diagonale $k = N$ est toujours égale à 1 (pourquoi ?)

Compter les combinaisons

Commençons par des cas simples:

$N \backslash k$	1	2	3	4
2	2	1	-	-
3	3	3	1	-
4	4	6	4	1

Ici, chaque entrée montre le nombre de sous-ensembles de taille k à partir d'un ensemble de taille N.

Remarquez des motifs ?

- La première colonne $k = 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)
- La diagonale $k = N - 1$ est toujours égale à N (pourquoi ?)
- La diagonale $k = N$ est toujours égale à 1 (pourquoi ?)

N choisir k

Le nombre de façons de tirer k cartes d'un jeu de N cartes est :

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Où $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots 3 \times 2 \times 1$

Exemples :

$$\binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{5} = 1$$

Combien de mains dans un jeu de cartes ?

Maintenant que nous avons une formule mathématique, nous pouvons répondre à cette question

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Pour un jeu standard, $N = 52$ et nous voulons $k = 7$.

Le nombre de mains possibles de 7 cartes est

$$\binom{52}{7} = \frac{52!}{7!\,45!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 133{,}784{,}560$$

Plus de **100 millions de mains possibles !** Vous ne jouerez jamais deux fois au même jeu de cartes !

Permutations

Que se passe-t-il si l'on se préoccupe de **l'ordre** dans lequel les cartes sont tirées ?

- "Le tableau" (flop, turn et river) au Texas Hold'em

Le nombre de façons de choisir k objets parmi N **lorsque l'ordre compte**

$$P(N, k) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

Combien de façons différentes pouvons-nous tirer le tableau au poker ?

Combien de façons peut-on tirer 3 cartes *dans l'ordre* d'un jeu de 52 cartes ?

$$P(52, 3) = \frac{52!}{(52-3)!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132{,}600$$

Événements

Un **événement** est un **sous-ensemble de l'espace d'échantillonnage**. Il représente un résultat spécifique ou un ensemble de résultats qui nous intéressent.

Exemples:

- **Lancer deux pièces :** événement = "le premier lancer est face" = {HH, HT}.
- **Lancer un dé :** événement = "nombre pair" = $\{2, 4, 6\}$
- **Poker :** événement = "full house" (toutes les mains de 5 cartes contenant trois cartes d'un rang et deux d'un autre)

Important : un seul résultat est aussi un événement

- **Lancer deux pièces :** événement = "premier lancer face, second pile" = {HT}
- **Lancer deux dés :** événement = "double un" = $\{(1, 1)\}$
- **Poker :** événement = "quinte flush royale de coeur" = $(A\heartsuit, K\heartsuit, Q\heartsuit, J\heartsuit, 10\heartsuit)$

Probabilité d'un événement

$$P(E) = \frac{\text{Nombre de résultats dans } E}{\text{Nombre de résultats dans } S}$$

Exemples:

- Lancer deux pièces, événement = "premier lancer face" :

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Lancer un dé, événement = "nombre pair" :

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Opérations sur les événements

Dans la probabilité, on peut combiner ou modifier les événements en utilisant des opérations standards.

Complément : A^c = résultats **non dans** A

- Si A = "première pièce face" = $\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}\}$, alors A^c = "première pièce pile" = $\{\mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$.

Union : $A \cup B$ = résultats dans A ou B (ou les deux)

- Soit A = "nombre pair sur un dé" = $\{2, 4, 6\}$ et B = "nombre ≥ 4" = $\{4, 5, 6\}$. Alors $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

Intersection : $A \cap B$ = résultats dans A et B

- Soit A = tirer un as et B = tirer un coeur. Alors $A \cap B$ = l'as de coeur

Résultats mutuellement exclusifs

Deux événements sont **mutuellement exclusifs** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. En d'autres termes, la réalisation d'un événement **empêche** l'autre de se produire.

Mathématiquement, A et B sont mutuellement exclusifs si $A \cap B = \{\}$

Exemples:

- **Lancer un dé :** "nombre pair" et "nombre impair"
- **Lancer une pièce :** "face" et "pile"

Pour des événements mutuellement exclusifs, la probabilité de leur union est la **somme de leurs probabilités individuelles**. Si A et B sont mutuellement exclusifs, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(Est-ce également vrai pour des événements non mutuellement exclusifs ?)

Probabilité de l'union d'événements

En général, si A et B sont deux événements (pas nécessairement mutuellement exclusifs), alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pourquoi devons-nous soustraire $P(A \cap B)$?

Probabilité de l'union d'événements

En général, si A et B sont deux événements (pas nécessairement mutuellement exclusifs), alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pourquoi devons-nous soustraire $P(A \cap B)$?

Pour éviter de **compter deux fois** les résultats dans A et B (c'est-à-dire $A \cap B$)

Soit A = "As" et B = "coeur" ne sont pas mutuellement exclusifs (As de coeur)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle mesure la probabilité qu'un événement A se produise étant donné qu'un autre événement B s'est produit.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Exemple : Tirer une carte d'un jeu standard.

- A = "la carte est un roi" = $\{K_\heartsuit, K_\diamondsuit, K_\spadesuit, K_\clubsuit\}$
- B = "la carte est un coeur" = $\{A_\heartsuit, 2_\heartsuit, \ldots, K_\heartsuit\}$
- Alors $P(A \mid B)$ = probabilité que la carte soit un roi sachant qu'elle est un coeur = $\frac{1}{13}$

Probabilité de l'intersection d'événements

La probabilité que l'événement A et l'événement B se produisent est

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

Exemple : en utilisant le même exemple de carte que la diapositive précédente,

$$P(\text{Roi} \cap \text{coeur}) = P(\text{Roi} \mid \text{coeur})P(\text{coeur}) = \frac{1}{13} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52}$$

Indépendance

Deux événements A et B sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'affecte pas la probabilité de l'autre :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemple : Lancer une pièce et lancer un dé.

- A = "la pièce montre face"
- B = "le dé montre 6"
- Ces événements sont indépendants car connaître le résultat de la pièce ne change pas la probabilité d'obtenir un 6 :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Mutuellement exclusifs $\neq$ indépendants

Il est important de distinguer événements mutuellement exclusifs et événements indépendants :

- **Mutuellement exclusifs :** ne peuvent pas se produire en même temps.
- **Indépendants :** la réalisation de l'un n'affecte pas la probabilité de l'autre.

Exemple : Lancer un dé

- $A = \{\text{pair}\}$, $B = \{\text{impair}\}$
- A et B sont mutuellement exclusifs mais **pas indépendants** (si A se produit, B ne peut pas se produire)

Règle de Bayes

La règle de Bayes nous permet d'inverser l'ordre des probabilités conditionnelles :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Exemple : Tirer une carte d'un jeu standard

- A = "la carte est un coeur" = $\{13 \text{ cartes}\}$
- B = "la carte est un as" = $\{A_\heartsuit, A_\diamondsuit, A_\clubsuit, A_\spadesuit\}$
- Alors, en utilisant la règle de Bayes :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{13} \cdot \frac{13}{52}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{4}$$

Sachant que nous avons tiré un as, il y a 1 chance sur 4 que ce soit un coeur.

Reverend Thomas Bayes

(1701–1761)

Jeu de classe : le duel des dés

Nous allons maintenant jouer à un jeu simple de dés pour explorer les concepts de probabilité en action. Chaque groupe dispose de deux dés. À chaque tour, lancez les deux dés et notez les résultats. **Événements :**

- A: somme des dés ≥ 7
- B: les deux dés montrent le même nombre (un double)
- C: le dé rouge est pair
- D: le dé blanc ≥ 4

Instructions :

- Lancez les dés et notez quels événements se produisent
- Suivez les résultats sur plusieurs tours sur une feuille de papier
- Après 25 lancers, calculez les probabilités suivantes à partir des résultats observés :
  - $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(C \mid D)$, etc.
- Discutez : quels événements sont mutuellement exclusifs ou indépendants ?

Duel des dés : probabilités des événements

Événement A : Il y a 21 résultats avec somme ≥ 7 : $(1,6),(2,5),(2,6),\ldots,(6,6)$

$$P(A) = \frac{21}{36} = 0.583$$

Événement B : Il y a 6 doubles : $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$

$$P(B) = \frac{6}{36} = 0.167$$

Événement C : 18 résultats où le dé rouge = 2,4,6

$$P(C) = \frac{18}{36} = 0.5$$

Événement D : dé blanc ≥ 4 ; 18 résultats

$$P(D) = \frac{18}{36} = 0.5$$

Duel des dés : probabilité conditionnelle

Intersection de A et B :

$$P(A \cap B) = P(\{(4,4),(5,5),(6,6)\}) = \frac{3}{36} = 0.083$$

Probabilité conditionnelle $P(C \mid D)$: Probabilité que le premier dé soit pair **étant donné** que le deuxième dé ≥ 4. Il y a $6 \times 3 = 18$ résultats où le deuxième dé ≥ 4 Il y a 9 résultats où le premier dé est pair **et** le deuxième dé ≥ 4 :
$(2,4),(2,5),(2,6),(4,4),(4,5),(4,6),(6,4),(6,5),(6,6)$

$$P(C \mid D) = \frac{9}{18} = 0.5$$